Problèmes d'application - PCSI

Ce document est constitué d'un recueil de problèmes de Physique et Sciences de l'Ingénieur **à préparer et rédiger** pour le jour de la rentrée. Différents types de calculs littéraux sont abordés sur des problèmes de physique et de S2I. Ces derniers font appels à la maîtrise de calculs mathématiques vus au lycée et font, pour certains, échos aux exercices de préparation en mathématiques. Pour ce devoir :

- Aucune connaissance en physique ou en S2I n'est nécessaire, le contexte est donné uniquement pour information ;
- **Toute** expression doit être homogène, il sera donc impératif de vérifier la cohérence des unités quand celles-ci sont connues.

1 Problème à deux inconnues

Dans le cas d'un problème comportant deux équations et deux inconnues, x et y, il est possible de se ramener à un problème à une inconnue x par la méthode de substitution. Pour cela, on exprime y en fonction de x grâce à l'équation la plus simple, puis en remplaçant dans l'autre.

Problème 1 intensité en électricité
En électricité, un montage comporte 3 résistances R, R_1 et R_2 et 2 générateurs E_1 et E_2, ces 5 composants ont des valeurs constantes et connues.
On note I et I_1 les intensités des courants traversant les résistances R et R_1, représentant ici les deux inconnues du problème. On montre qu'elles vérifient le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} RI + R_1 I_1 = E_1 \\ (R+R_2)I - R_2 I_1 = E_2 \end{array}\right.$$

On cherche uniquement I.

1. Montrer que son expression est $I = \dfrac{R_1 E_2 + R_2 E_1}{R_1 R_2 + R(R_1 + R_2)}$.

Problème 2 moteur à courant continu
Un système est équipé d'un moteur à courant continu piloté par un courant d'intensité $i(t)$ variable dans le temps. On cherche à définir l'évolution de sa vitesse de rotation $\omega_m(t)$, en fonction des différents paramètres du moteur. On donne :

$$\begin{cases} J_{eq} \cdot \omega_m'(t) = K \cdot i(t) \\ i(t) = i_0 \cdot \sin(w \cdot t) \end{cases}$$

où J_{eq} est l'inertie équivalente en kg·m^2, K la constante de couple en N·m·A^{-1}, i_0 un courant en A et w une pulsation en rad·s^{-1}. Ces trois paramètres sont constants.

1. Exprimer $\omega_m'(t)$ la dérivée temporelle de la vitesse de rotation en fonction des paramètres J_{eq}, K, i_0, w et du temps t.
2. Sachant que $\omega_m(0) = 0$, exprimer $\omega_m(t)$ en primitivant la relation précédente.

■

2 Dérivée et intégration

Chaque grandeur ou variable physique, notée par exemple g, peut s'exprimer en fonction d'une autre, notée par exemple x. On note alors $g(x)$ la relation qui permet d'exprimer g en fonction de x. Ainsi la dérivée de $g(x)$, que l'on peut être amené à noté $g'(x)$, se note plus généralement $\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$ pour bien indiquer le rôle de chaque variable, au numérateur celui de "fonction", au dénominateur celui de "variable mathématique".
La dimension de cette dérivée est alors donnée par $[g][x]^{-1}$.

Problème 3 régime transitoire exponentiel
Lors de la charge électrique d'un condensateur de capacité C à l'aide d'un générateur de tension constante E à travers une résistance R, l'expression de la tension u aux bornes de C en fonction du temps t est donnée par

$$u(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

où τ est une constante telle que $\tau = RC$.

1. Déduire l'unité de τ à partir de l'expression de $u(t)$.
2. Déterminer l'expression de l'instant $t_{99\%}$ pour lequel la tension $u(t_{99\%})$ vaut 99% de E.

L'intensité $i(t)$ du courant traversant le circuit est définie par $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$.

3. Montrer que $i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

L'énergie dégagée par effet Joule par la résistance R de ce circuit entre l'instant initial $t_o = 0\,\mathrm{s}$ et un instant t_f est définie par $W = \int_0^{t_f} R \cdot i^2(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Exprimer W en fonction de E, C, R, τ et t_f, puis donner sa limite pour $t_f \to \infty$

■

Problème 4 régime sinusoïdal
Un oscillateur harmonique est un système dont le mouvement est périodique de période T. On utilise généralement la notation $\omega = \frac{2\pi}{T}$, appelée pulsation temporelle, pour alléger les expressions. Ainsi, pour un oscillateur horizontal (système masse-ressort par exemple) la position de cet oscillateur vérifie l'équation horaire $x(t) = X\sin(\omega \cdot t)$ avec X une constante.

1. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps définie par $v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$.
2. Déterminer l'énergie cinétique moyenne, notée $\langle E_c \rangle$, de cet oscillateur définie par

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2T}\int_0^T m \cdot v^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

en fonction des paramètres X, T et m (la masse). On rappelle que $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

Un mouvement circulaire d'un point M peut être décrit selon deux coordonnées (x,y) vérifiant :

$$x(t) = X\sin(\omega \cdot t) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega \cdot x(t).$$

On suppose qu'initialement $y(0) = 0$.

3. Exprimer $y(t)$ en fonction de X, ω et du temps t.
4. Montrer que M décrit un cercle de rayon R et de centre de coordonnées $(0,a)$ d'équation $x^2 + (y-a)^2 = R^2$ où R et a sont à déterminer en fonction de X et ω.

■

3 Utilisation des complexes

La notation complexe est souvent employée pour exprimer une grandeur sinusoïdale a. En effet, un complexe $\underline{z} = a + i \cdot b$ a un module $Z = \sqrt{a^2+b^2}$ et un argument $\arg(\underline{z}) = \theta$ tel que $\underline{z} = Z\exp(i\theta)$. On a alors $a = Z\cos(\theta)$ et $b = Z\sin(\theta)$.

Problème 5 circuit RLC en régime sinusoïdal forcé
Comme précédemment on utilise la pulsation temporelle ω. R, L et C sont des constantes positives caractérisant les composants d'un circuit.

1. Donner l'argument θ du complexe $\underline{z} = iRC\omega$.
2. Donner l'argument θ du complexe $\underline{z} = \frac{R}{iL\omega}$.

Pour étudier les caractéristiques d'un circuit, on étudie la fonction complexe $\underline{T}$ de la forme :

$$\underline{T}(ix) = 1 + iQ\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

On note alors $T(x)$ son module.

3. Exprimer $T(x)$ en fonction de Q et de x.
4. Déterminer les racines positives x_1 et x_2 solutions de $T^2(x) = 2$

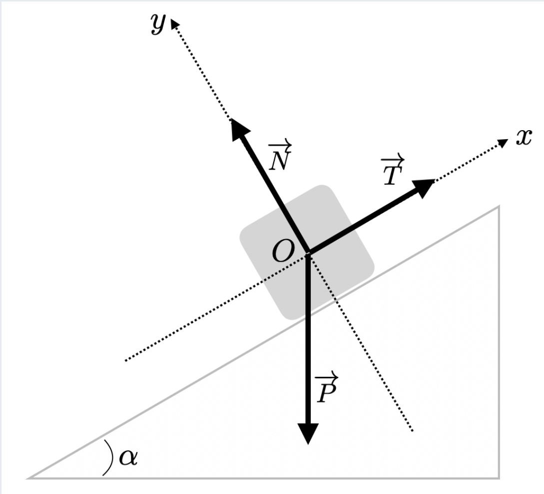
■

4 Représentation vectorielle

On définit les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{U}$ selon un repère (O,x,y) selon les projections de ce vecteur de norme U et, par exemple, d'angle θ avec l'axe Ox selon $U_x = U\cos(\theta)$ et $U_y = U\sin(\theta)$.

Problème 6 équilibre en mécanique

Un cube de centre O est en équilibre sur un plan incliné d'angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Les forces sont représentées par des vecteurs dans le plan ramenées au centre O du système étudié.



Ce système est soumis à 3 forces :

— son poids $\overrightarrow{P}$ avec $P = \|\overrightarrow{P}\| = 50\,\mathrm{N}$

— la réaction normale au plan incliné $\overrightarrow{N}$

— l'action tangentielle $\overrightarrow{T}$ entre le cube et le plan, liée au frottement

La représentation ci-contre des 3 forces ne correspond pas à l'état d'équilibre voulu.

Reproduire le schéma ci-dessus avec **uniquement** le poids en utilisant l'échelle $10\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{cm}$.

1. Tracer $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$ de matière à assurer l'équilibre du cube en indiquant votre démarche par des traits de construction au crayon.

2. Évaluer les normes de $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$ selon votre construction.

3. Exprimer les expressions littérales des normes de $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$ en fonction de P , $\cos(\alpha)$ ou $\sin(\alpha)$. Vérifier la cohérence des valeurs numériques avec l'évaluation graphique.