Préparation pour les mathématiques en PCSI

Ce polycopié s'adresse aux étudiants entrant en PCSI au lycée Condorcet.

Vous avez terminé vos études secondaires, vous avez obtenu votre baccalauréat et vous êtes admis en PCSI au lycée Condorcet, félicitations ! Les études en classe préparatoire que vous allez entreprendre à partir de septembre sont intenses et exigeantes (et, on l'espère, passionnantes !). Il y aura en début d'année une importante marche à franchir par rapport à la terminale.

On nous demande souvent des conseils sur le genre de préparation que l'on pourrait vouloir suivre pendant les vacances d'été. Ce document est là pour répondre à cette question. Les exercices qu'il contient constituent un entraînement de pré-rentrée adapté à la classe de PCSI.

Ces exercices sont complètement facultatifs et il n'en sera pas tenu compte en septembre. On peut piocher à son gré dans le polycopié et un faire un peu, beaucoup, ou pas du tout... On conseille de trouver un juste milieu : le début d'année risque d'être bien difficile si on n'a pas fait de mathématiques du tout pendant deux mois, mais il s'agit quand même d'arriver à la rentrée reposé et motivé, en ayant bien profité de ses vacances.

Ces exercices servent à consolider certains points du programme du lycée. Ils doivent être recherchés sans calculatrice. Il y a des calculs bêtes et « énormes » (hé oui, la calculatrice sera systématiquement interdite en mathématiques et on aura besoin d'une bonne dextérité calculatoire !). Il y a des révisions d'analyse (dérivées, primitives), de la trigonométrie, des nombres complexes... Certains exercices plus difficiles sont marqués d'une étoile (★). Ils sont présents en guise de défi. Enfin, on trouve au fil des pages de petits jeux mathématiques pour égayer son été et muscler ses cellules grises.

Un dernier mot, sans rapport avec les mathématiques : pensez absolument à lire cet été les œuvres au programme de français ! Même si vous n'avez pas l'habitude de ce genre de lecture, faites cet effort : il est impératif de connaître les œuvres pour aborder le cours de français et vous aurez beaucoup moins de temps à y consacrer une fois rentré.

Passez de bonnes vacances et rendez-vous en septembre.

1 Fractions

Exercice 1 Simplifier autant que possible les fractions suivantes.

a) $$\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{y+1}{y-1}}{\dfrac{y+1}{x-1}-\dfrac{x+1}{y-1}}$$ ***b)*** $$\dfrac{\dfrac{x+a}{ax+1}-\dfrac{x+b}{bx+1}}{1-\dfrac{(x+a)(x+b)}{(ax+1)(bx+1)}}$$

■

Exercice 2 Simplifier autant que possible l'expression suivante.

$$\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\times\frac{1+\dfrac{a}{b+c}}{1-\dfrac{a}{b+c}}\times\frac{b^2+c^2-(b-c)^2}{a+b+c}$$

■

Exercice 3 ***a)*** Démontrer que pour tous nombres réels a, b et c, on a l'égalité :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

b) Utiliser l'égalité précédente pour simplifier l'expression suivante :

$$\frac{x^2-yz}{1+\dfrac{y+z}{x}}+\frac{y^2-xz}{1+\dfrac{z+x}{y}}+\frac{z^2-xy}{1+\dfrac{x+y}{z}}$$

■

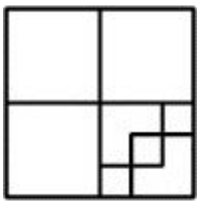
Exercice 4 — ★. Simplifier au maximum les deux expressions suivantes.

a) $$\frac{\dfrac{a(a+b)}{a-b}+\dfrac{a(a+c)}{a-c}}{1+\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}}+\frac{\dfrac{b(b+c)}{b-c}+\dfrac{b(b+a)}{b-a}}{1+\dfrac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}}+\frac{\dfrac{c(c+a)}{c-a}+\dfrac{c(c+b)}{c-b}}{1+\dfrac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}}$$

b) $$\frac{b+c-2a}{\dfrac{(b-c)^3}{b^3-c^3}+\dfrac{(a-b)(a-c)}{b^2+bc+c^2}}+\frac{c+a-2b}{\dfrac{(c-a)^3}{c^3-a^3}+\dfrac{(b-c)(b-a)}{c^2+ca+a^2}}+\frac{a+b-2c}{\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3}+\dfrac{(c-a)(c-b)}{a^2+ab+b^2}}$$

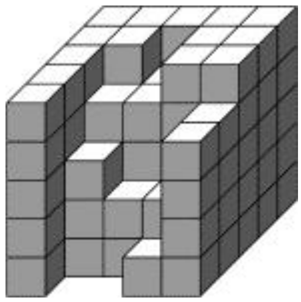
■

LES CARRÉS



Comptez tous les carrés de la figure ci-contre.

LE CUBE INCOMPLET



Alizée voulait construire un grand cube de $5 \times 5 \times 5$ petits cubes. Elle n'a pas pu le terminer. Combien de petits cubes lui manquait-il?

2 Racines

Exercice 5 Simplifier autant que possible les expressions suivantes.
(Les nombres a, b, c, x et y sont des réels positifs).

a) $\sqrt{4096}$

b) $\sqrt{49a^2(x^2+y^2)}$

c) $\sqrt{432/289}$

d) $\sqrt{199a^6b^4c^2}$

e) $\sqrt{\dfrac{64a^6b^5}{25c^2}}$

f) $\sqrt{\dfrac{9a^6(a^2+b^2)^2}{(a+b)^4}}$

■

Exercice 6 — ★. Dans cet exercice, on demande dans chaque question lequel des deux nombres a ou b est le plus grand.

a) Comparer $a = \sqrt{5}+\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{7}+1$.

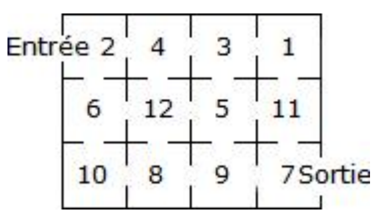
b) Comparer $a = 3(3-\sqrt{7})$ et $b = 2(\sqrt{3}-1)$

c) Comparer $a = \sqrt{15}+\sqrt{3}$ et $b = 2+\sqrt{13}$

d) Comparer $a = \sqrt{23}-\sqrt{21}$ et $b = \sqrt{6}-\sqrt{5}$

■

VISITE ÉCLAIR



Le plan de ce musée indique le nombre de tableaux exposés dans chacune des douze salles. Enzo n'a le temps de visiter que six salles et il veut voir le plus grand nombre possible de tableaux. Dessinez son trajet.

Exercice 7 On sait que $0 < p < m < a$. Montrer qu'on a alors

$$\frac{m}{\sqrt{a+m}-\sqrt{a-m}} < \frac{p}{\sqrt{a+p}-\sqrt{a-p}}$$

■

Exercice 8 — ★. On a deux réels positifs A et B qui vérifient $B \leqslant A^2$.

a) Montrer l'identité

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(A+\sqrt{A^2-B}\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(A-\sqrt{A^2-B}\right)}$$

b) En déduire

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

■

FÉVRIER PALINDROME

On écrit les dates sous la forme jjmmaaaa (par exemple 01092015 pour le 1er septembre 2015).
Le 21 février 2012 s'écrivait 21022012.
Un tel nombre, qui se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche, est un nombre palindrome.
Quelle sera la prochaine date palindrome ?

Exercice 9 Dans chaque question, on demande de trouver au moins un nombre réel x vérifiant l'égalité indiquée, en l'exprimant sous la forme la plus simple possible.

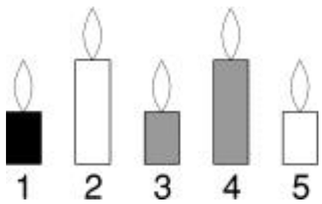
a) Trouver x tel que $x^2 = (-2)^9 \times \left(-\frac{8}{81}\right)^2 \times \left(+\frac{5}{4}\right)^3 \times \left(-\frac{9}{10}\right)^5$.

b) Trouver x tel que $x^3 = (-3)^6 \times \left(-\frac{125}{7}\right) \times \left(+\frac{8}{25}\right)^2 \times \left(+\frac{5}{49}\right)$.

c) Trouver x tel que $x^5 = \left(+\frac{5}{4}\right)^5 \times \left(-\frac{16}{27}\right)^2 \times \left(-\frac{12}{10^5}\right)$.

■

LES BOUGIES



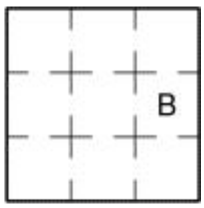
Les bougies de Manoj et de Loïc ont la même taille. Celles de Loïc et de Paul ont la même couleur. Celles de Paul et Sefa n'ont pas la même taille. Enfin, celles de Sefa et de Manoj n'ont pas la même couleur. Quelle est la bougie de Yacine?

Exercice 10 — ★. On a deux réels positifs a et b. Démontrer l'égalité :

$$\sqrt{a^3+\sqrt[3]{a^6b^3}}+\sqrt{b^3+\sqrt[3]{a^3b^6}}=\sqrt{(a+b)^3}$$

■

LE PLAN DU MUSÉE



Ce musée expose dans neuf salles. La salle Braque (B) est indiquée. On trouve des cartes postales dans la salle Ernst. De la salle Van Gogh (V), on peut se rendre directement dans les salles Picasso (P), Cézanne (C) et Kandinski (K). De la salle Kandinski, on peut se rendre directement dans les salles Braque, Matisse (M) et Renoir (R). De la salle Dali (D), on ne peut pas se rendre directement dans la salle Braque. De la salle Matisse (M), on peut se rendre directement dans les salles Picasso et Dali. Complétez le plan à l'aide des initiales des peintres.

3 Puissances

Exercice 11 Simplifier autant que possible les expressions.

a) $\left(\frac{3}{5}a^2b^2x\right)\left(\frac{2}{3}a^3b^4y^2\right)$

b) $\left(\frac{3}{5}a^3x^5\right)\left(-\frac{4}{3}ax^2y\right)\left(\frac{5}{2}ax^2y\right)$

■

Exercice 12 Simplifier autant que possible les expressions (a et b sont des réels non nuls).

a) $\left[(a^2b^3)^4\right]^5$

b) $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2\left(\frac{a}{4b}\right)^3\left(\frac{b^2}{a}\right)^2$

c) $(a^3b^{-4})^2\times(-2a^{-5}b^6)^3$

d) $\left(\frac{a^1b^{-2}}{a^{-3}b^0}\right)^5\left(\frac{a^{-6}b^5}{a^4b^{-3}}\right)^3$

■

RECTANGLE DE HASARD

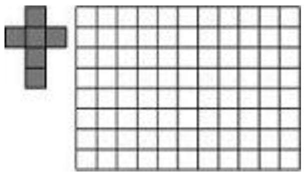
Yasmine lance deux dés à six faces, numérotées de 1 à 6. Les deux nombres obtenus sont la longueur et la largeur (en cm) d'un rectangle qu'elle construit. Elle s'aperçoit alors qu'en augmentant d'un même nombre entier de cm la longueur et la largeur de ce rectangle, son aire double. Quelle est l'aire, en cm^2, du rectangle doublé?

Exercice 13 Quand x est différent de 1 ou de -1, simplifier

$$\frac{x^9+(-x)^{14}}{x^7+x^{12}}$$

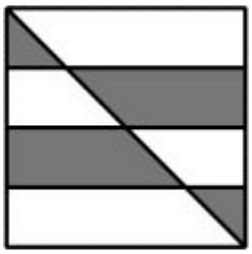
■

Rangement pénible



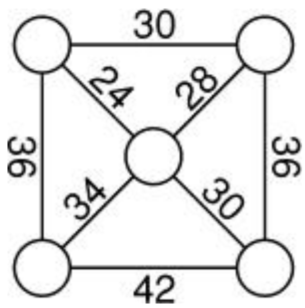
Combien Auriane peut-elle ranger, au maximum, de pièces en forme de croix dans une boîte rectangulaire 11×8? Note: les pièces, rangées à plat, peuvent se toucher, mais pas se superposer.

Le champ du père Méable



Pierre Méable possède un champ carré de 100 m de côté. Amateur de fleurs, il a partagé son champ en quatre bandes de même largeur, il a tracé une diagonale, puis il a planté une partie du champ en rosiers (en gris sur le dessin) et le reste en tulipes. Quelle fraction du terrain représente la partie plantée en rosiers?

Les cinq nombres



Choham avait écrit cinq nombres sur les cinq disques du dessin ci-contre. Ils ont été effacés, mais heureusement, sur chaque segment, Choham avait pris soin de noter la somme des deux nombres placés dans les deux disques situés aux extrémités de ce segment. Retrouvez les cinq nombres.

Exercice 14 — ★. Calculer $(x+1)^7 - 1 - x^7$, puis démontrer que cette expression se factorise sous la forme

$$(x+1)^7 - 1 - x^7 = 7x(x+1)P(x)^2$$

où $P(x)$ est un polynôme du second degré que l'on précisera. ■

CARRÉ D'ANNÉE Quel est le plus petit nombre entier positif dont le carré se termine par les chiffres 2016?

4 Calcul numérique

Exercice 15 Calculer les nombres suivants, en essayant d'être rapide et efficace !

a) $(-3)^2(+4)^2(-5)^2$

b) $\left(-\frac{8}{7}\right)^2\left(+\frac{5}{4}\right)^2\left(-\frac{7}{10}\right)^2$

c) $\left(-\frac{7}{25}\right)\left(+\frac{4}{7}\right)^2\left(-\frac{5}{8}\right)^3$

d) $(+2)^3(-5)^3(+7)^3$

e) $\dfrac{(-2)^5(+5)^9(-9)^3}{(-10)^6(+15)^4}$

f) $\dfrac{(-18)^7(+2)^4(-50)^3}{(-25)^6(-4)^5(-27)^2}$

g) $\dfrac{(+4/3)^3+(-5/4)^3-5\,(4/3-5/4)}{(-5/8)^2+(2/3)^2-5/6}$

h) $\dfrac{\left(3^2/2^2\times 5\right)^3+(3^2+2^4)\left(2^2/5^2\right)\left(3^3/2^4\times 5\right)}{1+\left(2^2/5\right)^2+(5/2^2)^2}$

■

CARRÉ D'ANNÉE BIS Quel est le plus petit nombre entier positif dont le carré commence par les chiffres 2019?

5 Inégalités

Exercice 16 On suppose que a et b sont deux nombres réels vérifiant les inégalités $-1 < a \leqslant 3$ et $-7 \leqslant b \leqslant -2$.

a) Donner le meilleur encadrement possible de $a+b$.

b) Donner le meilleur encadrement possible de $a-b$.

c) Donner le meilleur encadrement possible de $a\times b$.

d) Donner le meilleur encadrement possible de a/b.

■

Exercice 17 Soit x un réel tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant x < 2$.

a) Donner le meilleur encadrement possible de ${}^1/_x$.

b) Donner le meilleur encadrement possible de $\sin x$.

c) Donner le meilleur encadrement possible de $\dfrac{1}{1+x^2}$.

d) Que peut-on dire de $\tan x$?

■

BON POUR UN 421

Mathilde et Lily jouent au jeu suivant. Elles ont écrit, dans cet ordre, les neuf chiffres 1 2 3 4 5 6 7 8 9 et elles essaient, en intercalant entre certains chiffres, une ou plusieurs fois, un ou plusieurs des symboles $+$, $-$, $\times$ et $/$, d'obtenir 421. Mathilde a écrit $1+2\times 3-45+6\times 78-9=421$, tandis que Lily a trouvé $12\times 34-56+78-9=421$. Proposez-leur une autre solution.

Exercice 18 — ★. Comment faut-il choisir le paramètre réel m pour que l'équation suivante, d'inconnue x :

$$(m-2)x^2-2(m+3)x+4m=0$$

ait deux racines, l'une étant inférieure à 2 et l'autre supérieure à 3 ? ■

Exercice 19 Pour tout réel x, on pose $f(x)=\sin x - x$.

a) Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer son signe.

b) Dresser le tableau de variations de f. Que vaut $f(0)$?

c) En déduire que pour tout réel x positif, on a $\sin x \leqslant x$.

■

BILLES EN TÊTE

Mona a six sacs de billes devant elle. Les nombres de billes contenues dans les sacs sont des entiers consécutifs pas nécessairement distincts, par exemple comme 12, 12, 13, 14, 14, 15. Mona prend les trois premiers sacs pour elle et donne les trois autres à son frère. Elle possède alors 58 billes en tout et son frère en a 61. Donnez par ordre croissant les nombres de billes contenues dans les sacs.

Exercice 20 En adaptant la méthode de l'exercice précédent, montrer que ...

a) Pour tout réel x on a $e^x \geqslant 1+x$.

b) Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\tan x \geqslant x$.

c) Pour tout réel x on a $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

■

6 Dérivation

Exercice 21 Dériver formellement (c'est-à-dire sans se préoccuper des ensembles de définition et de dérivation) les expressions suivantes :

a) $-1-x+(1-x)(3-x)$

b) $x-\sqrt{1-x}$

c) $x^3(1+\sqrt{x})$

d) $2x^3-x^2\sqrt{x}$

e) $\sin(2x)\cos(3x)$

f) $(3x-1)^5$

g) $\tan(2x)-2\ln(1+x^2)$

h) $3\sin(3x-1)-1$

■

Exercice 22 Même question que l'exercice précédent :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

b) $\sqrt{\dfrac{1}{3x-1}}$

c) $\dfrac{1+2\sin(2x)}{\cos x}$

d) $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)(x+\sqrt{x})$

e) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

f) $\left(\dfrac{x+3}{1-x}\right)^3$

g) $\dfrac{(2x+3)^3}{(1-3x)^5}$

h) $\dfrac{1}{1+2\sqrt{3x-5}}$

■

Exercice 23 Même question que l'exercice précédent :

a) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x-2)}$

b) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

c) $\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

d) $(2x+3)\sqrt{2x+3}$

e) $\ln(\ln x)$

f) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

g) e^{x^2+7x-4}

h) $e^{\sqrt{x^2-x+1}}$

i) $\ln(\sin x)$

j) $\ln(\cos x)$

k) $\ln(e^x+1)$

l) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

m) $\dfrac{e^{\sin x}}{1+e^{\cos x}}$

■

MI-CARRÉ MI-CUBE

Un nombre est dit mi-carré mi-cube s'il peut s'écrire comme la somme d'un carré et d'un cube. Ainsi, l'an 2007 aura été une année mi-carrée mi-cube car $2007 = 26^2 + 11^3$. Quelle sera la prochaine année mi-carrée mi-cube?

Exercice 24 Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Calculer f'', la dérivée seconde de f (c'est-à-dire la dérivée de f').

c) Calculer les dérivées troisième et quatrième f''' et $f^{(4)}$ de f.

d) Que peut-on conjecturer quant à la dérivée n-ième de f ?

▷ Lorsque $x \mapsto f(x)$ est une fonction dérivable d'une variable x, on peut choisir de noter sa dérivée $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ au lieu de $f'(x)$, ce qui permet de bien mettre en évidence la variable de dérivation. Par exemple, si $f(x) = 2x + 3y + xy^2$ (y étant une constante quelconque), on a $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2 + 0 + y^2$. Par contre, si $f(y) = 2x + 3y + xy^2$ (x étant une constante quelconque), on a $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} = 0 + 3 + 2xy$.

Exercice 25 Calculer formellement les dérivées indiquées (les lettres surnuméraires sont des constantes quelconques).

a) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ avec $f(x) = 8x^2y + 3xy^4 - xy$.

b) $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}$ avec $g(y) = (x+y)(3x-2y^2) + (x^2+y)(y-1)$.

c) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}$ avec $f(u) = e^{u \ln v} + e^{v \ln u}$.

d) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ avec $f(x) = \dfrac{x^2+y}{x+y^2}$.

e) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ avec $f(z) = \dfrac{\sin(x)+y}{y+z}$.

f) $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}$ avec $g(u) = \dfrac{uvt}{1/u + 1/v + 1/t}$.

7 Calcul de primitives et Intégration

On rappelle d'abord les primitives des fonctions usuelles, à connaître sur le bout des doigts !

Intervalle(s)	$f(x)$	$F(x)$	remarques
$\mathbb{R}$	$x^n\ (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x^n}\ (n \geqslant 2)$	$\dfrac{-1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{x^{n-1}}$	$\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$ $\quad \dfrac{1}{-n+1}=\dfrac{-1}{n-1}$ $\quad x^{-n+1}=\dfrac{1}{x^{n-1}}$
$]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x$	
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$	
$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	*attention :* $\ln x$ sur $]0,+\infty[$, mais $\ln(-x)$ sur $]-\infty,0[$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x	

Exercice 26 Par un calcul de primitive simple, calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$ (où $n \geqslant 0$)

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos t\,\mathrm{d}t$

d) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u$

e) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(2x^5+4x^3-3x\right)\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos t+\sin t)\,\mathrm{d}t$

h) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{2x^5+4x^3-3x}{x^4}\,\mathrm{d}x$

■

On rappelle maintenant le formulaire des primitives de fonctions composées, à connaître également !

$f(x)$	$F(x)$	condition	remarques
$u'(x)\cdot u(x)^n$ $(n\in\mathbb{N})$	$\dfrac{1}{n+1}u(x)^{n+1}$		
$\dfrac{u'(x)}{u(x)^n}$ $(n\geqslant 2)$	$\dfrac{-1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{u(x)^{n-1}}$	$u(x)\neq 0$ sur I	$\dfrac{1}{-n+1}=\dfrac{-1}{n-1}$ et $u(x)^{-n+1}=\dfrac{1}{u(x)^{n-1}}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$	$u(x)>0$ sur I	
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$	$u(x)\neq 0$ sur I	*attention :* $\begin{cases}\ln u(x) & \text{si } u(x)>0 \text{ sur } I\\ \ln(-u(x)) & \text{si } u(x)<0 \text{ sur } I\end{cases}$
$u'(x)\cdot e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$		

Exercice 27 Déterminer une primitive de chacune des expressions ci-dessous après avoir identifié une situation du tableau précédent.

a) $f(x)=\cos x - x\cdot\sin x$

b) $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

c) $f(x)=\cos x\cdot(2\sin x+1)^4$

d) $f(x)=\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}$

e) $f(x)=\dfrac{(\ln x)^4}{x}$

f) $f(x)=\sin^3 x$

g) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

h) $f(x)=\dfrac{2}{(3x-4)^2}$

i) $f(x)=\dfrac{2x}{(3x^2+1)^4}$

j) $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

k) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

l) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+5}}$

m) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$

n) $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

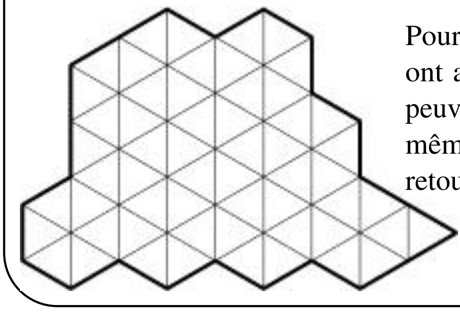
o) $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

p) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$

q) $f(x)=xe^{-x^2}$

■

LE GÂTEAU AU MIEL



Pour son anniversaire, Adrien a invité deux amis qui lui ont apporté un superbe gâteau nappé de miel. Comment peuvent-ils le découper en trois parts de même forme et de même aire? Note: à cause du miel, il n'est pas possible de retourner un morceau.

Exercice 28 — ★. En reconnaissant la dérivée d'une fonction composée quelconque, calculer :

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_1^{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

■

▷ *Pour aller plus loin : la formule d'intégration par parties.*

Soient $u,v : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies et dérivables (donc continues) sur un segment $[a,b]$, de dérivées u', v' également continues sur $[a,b]$.

• par produit, la fonction uv est donc dérivable sur $[a,b]$, avec : $(uv)'(t) = u'(t)\cdot v(t) + u(t)\cdot v'(t)$

• en intégrant cette égalité sur $[a,b]$, on obtient (par linéarité de l'intégrale) :

$$\int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)\cdot v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)\cdot v'(t)\,\mathrm{d}t$$

donc : $$[u(t)\cdot v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)\cdot v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)\cdot v'(t)\,\mathrm{d}t$$

ou encore : $$u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a) = \int_a^b u'(t)\cdot v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)\cdot v'(t)\,\mathrm{d}t$$

• d'où :

$$\boxed{\int_a^b u(t)\cdot v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)\cdot v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\cdot v(t)\,\mathrm{d}t}$$

ce résultat est appelé « formule d'intégration par parties »

$\triangleright$ *Contexte type d'application de la formule d'intégration par parties :*

souhaitant calculer une intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$*, on peut envisager de recourir à une intégration par parties :*

• *d'une part, lorsque l'on ne trouve pas directement de primitive de* f*,*

• *et, d'autre part, lorsqu'on s'aperçoit qu'on peut réécrire* $f(t) = g(t)\cdot h(t)$*, où, en remplaçant* $g(t)$ *par sa dérivée* $g'(t)$*, et* $h(t)$ *par l'une de ses primitives* $H(t)$*, on obtient une intégrale* $\int_a^b g(t)\cdot H(t)\,\mathrm{d}t$ *calculable.*

$\triangleright$ *Voici deux exemples de rédaction utilisant une intégration par parties.*

Exemple 1 : *on souhaite calculer l'intégrale* $I = \int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t$.

Posons : $\left\{\begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(t) = \sin t \end{array}\right.$ *et :* $\left\{\begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\cos t \end{array}\right.$,

Comme u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[0,\pi]$*,*

en intégrant par parties, on obtient : $I = [-t\cos t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t \;\; [\ldots]$, *d'où* $I = \pi$.

Exemple 2 : *on souhaite déterminer une primitive de la fonction* ln *sur* $]0,+\infty[$ *:*

• *on sait qu'une primitive théorique convenable est la fonction* $F : x \longmapsto \int_1^x \ln t\,\mathrm{d}t$

• *fixons* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *et calculons* $F(x)$ *en intégrant par parties :*

Posons : $\left\{\begin{array}{l} u(t) = \ln t \\ v'(t) = 1 \end{array}\right.$ *et :* $\left\{\begin{array}{l} u'(t) = 1/t \\ v(t) = t \end{array}\right.$,

Les fonctions u et v étant dérivables et de dérivées continues sur $]0,+\infty[$*,*

en intégrant par parties, on obtient : $F(x) = [t\ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t}\cdot t\,\mathrm{d}t \;\; [\ldots] \;\; = x\ln x - x + 1$

d'où, en supprimant les constantes inutiles, une primitive de ln sur $]0,+\infty[$ *est la fonction* $x \longmapsto x\ln x - x$.

Exercice 29 En procédant à une intégration par parties, calculer :

a) $\displaystyle\int_1^2 te^{-t}\,\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$ (pour $x > 0$)

c) $\displaystyle\int_1^x t^n \ln t\,\mathrm{d}t$ (pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$).

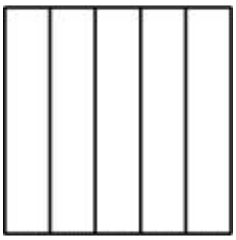
Exercice 30 — ★. En utilisant plusieurs intégrations par parties successives, et en arrangeant astucieusement le calcul, donner la valeur des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle I = \int_0^1 t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle I = \int_0^\pi e^t \cos(2t)\mathrm{d}t$

c) $\displaystyle I = \int_0^x e^{at}\cos(bt)\,\mathrm{d}t$ pour $a, b \in \mathbb{R}^*$.

LE PRÉ AMBULE



Dédé Ambule a décidé de diviser son pré carré en cinq parcelles rectangulaires (voir figure). Chaque parcelle a un périmètre égal à 150 mètres. Combien mesure le périmètre du pré Ambule?

8 Trigonométrie

Exercice 31 Sans regarder la page suivante...

a) Rappeler les valeurs des fonctions sin, cos et tan en les réels :

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4} \text{ et } \pi$$

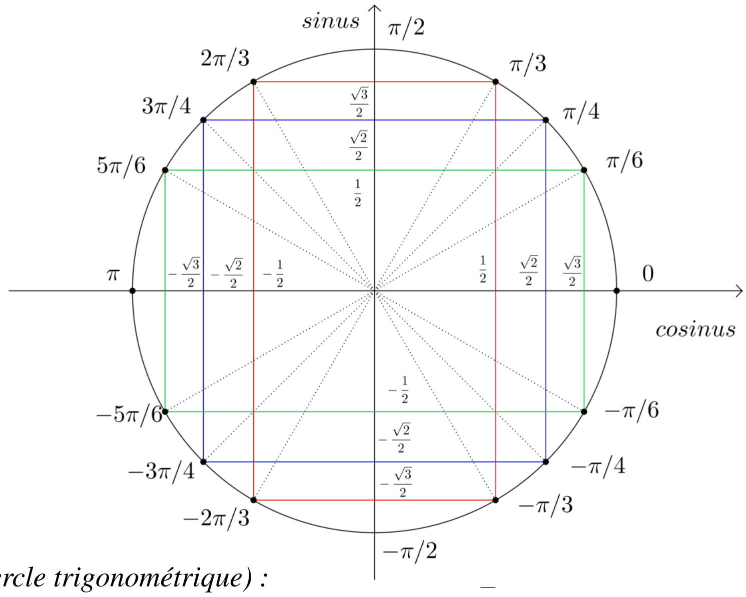
Placer sur le cercle trigonométrique le point $M(\cos t, \sin t)$ pour chacune des valeurs de t précédentes.

b) Rappeler les formules pour $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$ et $\tan(a+b)$ ainsi que $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$ et $\tan(a-b)$.

c) Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ et en déduire des expressions simplifiées de $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

▷ *Valeurs trigonométriques remarquables (à connaître !) :*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	!!!	$-\sqrt{3}$	-1	0



▷ *Formules élémentaires (se visualisent sur le cercle trigonométrique) :*

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(x + \pi/2) = -\sin x$	$\cos(\pi/2 - x) = \sin x$	$\cos(x+\pi) = -\cos x$
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(x + \pi/2) = \cos x$	$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$	$\sin(x+\pi) = -\sin x$

▷ *Formules d'addition (à connaître impérativement, elles entraînent toutes les autres) :*

$$\begin{array}{rcl}
\cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) & = & \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) & = & \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\sin(a-b) & = & \sin a \cos b - \cos a \sin b
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\cos(2x) & = & \cos^2 x - \sin^2 x \\
\cos(2x) & = & 2\cos^2 x - 1 \\
\cos(2x) & = & 1 - 2\sin^2 x \\
\hline
\sin(2x) & = & 2 \sin x \cos x
\end{array}$$

▷ *Formules de linéarisation (retrouvables en combinant les formules d'addition) :*

$$\begin{array}{rcl}
\cos a \cos b & = & \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right] \\
\sin a \sin b & = & \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right] \\
\sin a \cos b & = & \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]
\end{array}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \text{ ou } 1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \text{ ou } 1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Exercice 32 ***a)*** Rappeler la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{4}$.

b) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos x$.

c) En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

d) Déterminer également la valeur de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

L'IMPRIMEUR MALADROIT

Lorsque l'imprimeur a voulu numéroter les pages de ce livre, dans l'ordre, de la page 1 à la dernière page, en ne sautant aucun nombre, il a commis une erreur. Il a en effet tapé des 6 à la place de tous les 9, alors que les autres chiffres ont été tapés correctement. La numérotation de toutes les pages a nécessité exactement 36 chiffres 6. Quel est le nombre de pages de ce livre?

Exercice 33 — ★. ***a)*** Exprimer $\cos(2\theta)$, puis $\cos(3\theta)$, en fonction de $\cos\theta$.

b) Exprimer $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis exprimer $\sin(3\theta)$ comme produit de $\sin\theta$ et d'une expression dépendant de $\cos\theta$.

c) Établir à l'aide des question précédentes que $\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$.

d) On note $u = \cos\dfrac{\pi}{10}$. Justifier que $16u^5 - 20u^3 + 5u = 0$.

e) Résoudre l'équation $16x^2 - 20x + 5 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

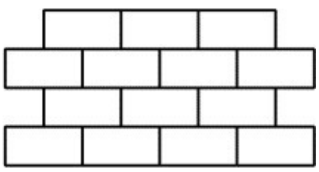
f) En déduire deux valeurs possibles pour u.

g) Justifier que $u > \cos\dfrac{\pi}{4}$ et vérifier que $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

h) En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

i) Déterminer ensuite la valeur des nombres : $\sin\dfrac{\pi}{10}$, $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

MUR DE COULEUR



Côme a construit un mur à partir de briques de couleurs jaune, brune et rouge. Deux briques qui se touchent sont toujours de couleurs différentes. Les briques jaunes valent 6€, les rouges 7€et les brunes 8€. À combien ce mur reviendra-t-il, au minimum?

9 Nombres complexes

▷ On rappelle qu'un nombre complexe peut s'écrire sous *forme algébrique* $z = a + ib$ (les réels a et b s'appellent les parties réelle et imaginaire de z). Un nombre complexe non nul peut aussi s'écrire sous *forme trigonométrique* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou *exponentielle* $z = re^{i\theta}$ (le réel positif r est le module de z, l'angle θ s'appelle son argument, il est défini modulo 2π).

▷ Mise sous forme algébrique d'un quotient de deux nombres complexes

Un quotient de deux nombres complexes dont le dénominateur n'est pas réel, comme $\dfrac{3-4i}{5+6i}$, doit être systématiquement réécrit afin que les termes non réels figurant au dénominateur disparaissent.

La « technique de la multiplication par le conjugué » consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur du quotient par le conjugué du dénominateur, celui-ci étant alors transformé en une expression de la forme $(a+ib)(a-ib)$, ie a^2+b^2, donc réelle.

Exercice 34 Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

a) $\dfrac{1}{i}$

b) $\dfrac{3-4i}{5+6i}$

c) $\dfrac{2+3i}{8-5i}$

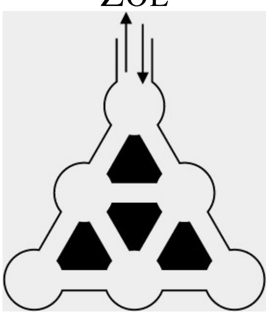
d) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

e) $\dfrac{1}{1+i}$

f) $\dfrac{(1+i)(1-i)^2}{1+2i}$

■

LA TROTTINETTE DE ZOÉ



Zoé vient de recevoir en cadeau une superbe trottinette. Elle décide de l'essayer sur le "trottinodrome" représenté ci-contre. Mais les pneus, encore neufs, laissent une trace sur le bitume de la piste. Zoé parcourt chaque allée exactement une fois. Elle peut repasser par le même carrefour, mais la trace qu'elle laisse ne doit jamais se recouper. Trouver tous les chemins possibles.

▷ *Détermination d'un argument d'un nombre complexe non nul écrit sous forme algébrique*

La « technique de mise en facteur du module » consiste à réécrire *(en pratique, le calcul exposé ci-dessous est purement théorique)* le complexe z de la façon suivante :

$$z = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right] = |z| \cdot \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]$$

Il ne reste ensuite plus qu'à identifier un réel θ tel que, simultanément : $\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

Exercice 35 Mettre sous forme module-argument les nombres complexes ci-dessous :

a) $\sqrt{3}+i$ ***b)*** $1-i\sqrt{3}$ ***c)*** $1-i$

■

Exercice 36 Mettre sous forme module-argument les nombres complexes ci-dessous :

a) $(-1+i)^5$ ***b)*** $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ ***c)*** $\dfrac{2i-2\sqrt{3}}{4i+4}$

■

Exercice 37 ***a)*** Résoudre l'équation $z^2+6z+10=0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

b) Résoudre l'équation $z^2+z+1=0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
On donnera les solutions : d'une part, sous forme algébrique ; d'autre part, sous forme trigonométrique.

c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$.
Résoudre l'équation $z^2-2z\cos\theta+1=0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
On donnera les solutions : d'une part, sous forme algébrique ; d'autre part, sous forme trigonométrique.

■

Problèmes d'application - PCSI

Ce document est constitué d'un recueil de problèmes de Physique et Sciences de l'Ingénieur **à préparer et rédiger** pour le jour de la rentrée. Différents types de calculs littéraux sont abordés sur des problèmes de physique et de S2I. Ces derniers font appels à la maîtrise de calculs mathématiques vus au lycée et font, pour certains, échos aux exercices de préparation en mathématiques. Pour ce devoir :

- Aucune connaissance en physique ou en S2I n'est nécessaire, le contexte est donné uniquement pour information ;
- **Toute** expression doit être homogène, il sera donc impératif de vérifier la cohérence des unités quand celles-ci sont connues.

1 Problème à deux inconnues

Dans le cas d'un problème comportant deux équations et deux inconnues, x et y, il est possible de se ramener à un problème à une inconnue x par la méthode de substitution. Pour cela, on exprime y en fonction de x grâce à l'équation la plus simple, puis en remplaçant dans l'autre.

Problème 1 intensité en électricité
En électricité, un montage comporte 3 résistances R, R_1 et R_2 et 2 générateurs E_1 et E_2, ces 5 composants ont des valeurs constantes et connues.
On note I et I_1 les intensités des courants traversant les résistances R et R_1, représentant ici les deux inconnues du problème. On montre qu'elles vérifient le système d'équations :

$$\begin{cases} RI + R_1 I_1 = E_1 \\ (R+R_2)I - R_2 I_1 = E_2 \end{cases}$$

On cherche uniquement I.

1. Montrer que son expression est $I = \dfrac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1R_2 + R(R_1+R_2)}$.

Problème 2 moteur à courant continu
Un système est équipé d'un moteur à courant continu piloté par un courant d'intensité $i(t)$ variable dans le temps. On cherche à définir l'évolution de sa vitesse de rotation $\omega_m(t)$, en fonction des différents paramètres du moteur. On donne :

$$\begin{cases} J_{eq} \cdot \omega_m'(t) = K \cdot i(t) \\ i(t) = i_0 \cdot \sin(w \cdot t) \end{cases}$$

où J_{eq} est l'inertie équivalente en kg·m^2, K la constante de couple en N·m·A^{-1}, i_0 un courant en A et w une pulsation en rad·s^{-1}. Ces trois paramètres sont constants.

1. Exprimer $\omega_m'(t)$ la dérivée temporelle de la vitesse de rotation en fonction des paramètres J_{eq}, K, i_0, w et du temps t.
2. Sachant que $\omega_m(0) = 0$, exprimer $\omega_m(t)$ en primitivant la relation précédente.

■

2 Dérivée et intégration

Chaque grandeur ou variable physique, notée par exemple g, peut s'exprimer en fonction d'une autre, notée par exemple x. On note alors $g(x)$ la relation qui permet d'exprimer g en fonction de x. Ainsi la dérivée de $g(x)$, que l'on peut être amené à noté $g'(x)$, se note plus généralement $\dfrac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$ pour bien indiquer le rôle de chaque variable, au numérateur celui de "fonction", au dénominateur celui de "variable mathématique".
La dimension de cette dérivée est alors donnée par $[g][x]^{-1}$.

Problème 3 régime transitoire exponentiel
Lors de la charge électrique d'un condensateur de capacité C à l'aide d'un générateur de tension constante E à travers une résistance R, l'expression de la tension u aux bornes de C en fonction du temps t est donnée par

$$u(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

où τ est une constante telle que $\tau = RC$.

1. Déduire l'unité de τ à partir de l'expression de $u(t)$.
2. Déterminer l'expression de l'instant $t_{99\%}$ pour lequel la tension $u(t_{99\%})$ vaut 99% de E.

L'intensité $i(t)$ du courant traversant le circuit est définie par $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$.

3. Montrer que $i(t) = \dfrac{E}{R}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

L'énergie dégagée par effet Joule par la résistance R de ce circuit entre l'instant initial $t_o = 0\,\mathrm{s}$ et un instant t_f est définie par $W = \displaystyle\int_0^{t_f} R \cdot i^2(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Exprimer W en fonction de E, C, R, τ et t_f, puis donner sa limite pour $t_f \to \infty$

■

Problème 4 régime sinusoïdal

Un oscillateur harmonique est un système dont le mouvement est périodique de période T. On utilise généralement la notation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, appelée pulsation temporelle, pour alléger les expressions. Ainsi, pour un oscillateur horizontal (système masse-ressort par exemple) la position de cet oscillateur vérifie l'équation horaire $x(t) = X\sin(\omega \cdot t)$ avec X une constante.

1. Déterminer l'expression de la vitesse en fonction du temps définie par $v(t) = \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$.
2. Déterminer l'énergie cinétique moyenne, notée $\langle E_c \rangle$, de cet oscillateur définie par

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2T}\int_0^T m \cdot v^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

en fonction des paramètres X, T et m (la masse). On rappelle que $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

Un mouvement circulaire d'un point M peut être décrit selon deux coordonnées (x,y) vérifiant :

$$x(t) = X\sin(\omega \cdot t) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \omega \cdot x(t).$$

On suppose qu'initialement $y(0) = 0$.

3. Exprimer $y(t)$ en fonction de X, ω et du temps t.
4. Montrer que M décrit un cercle de rayon R et de centre de coordonnées $(0,a)$ d'équation $x^2 + (y-a)^2 = R^2$ où R et a sont à déterminer en fonction de X et ω.

■

3 Utilisation des complexes

La notation complexe est souvent employée pour exprimer une grandeur sinusoïdale a. En effet, un complexe $\underline{z} = a + i \cdot b$ a un module $Z = \sqrt{a^2+b^2}$ et un argument $\arg(\underline{z}) = \theta$ tel que $\underline{z} = Z\exp(i\theta)$. On a alors $a = Z\cos(\theta)$ et $b = Z\sin(\theta)$.

Problème 5 circuit RLC en régime sinusoïdal forcé

Comme précédemment on utilise la pulsation temporelle ω. R, L et C sont des constantes positives caractérisant les composants d'un circuit.

1. Donner l'argument θ du complexe $\underline{z} = iRC\omega$.
2. Donner l'argument θ du complexe $\underline{z} = \dfrac{R}{iL\omega}$.

Pour étudier les caractéristiques d'un circuit, on étudie la fonction complexe $\underline{T}$ de la forme :

$$\underline{T}(ix) = 1 + iQ\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

On note alors $T(x)$ son module.

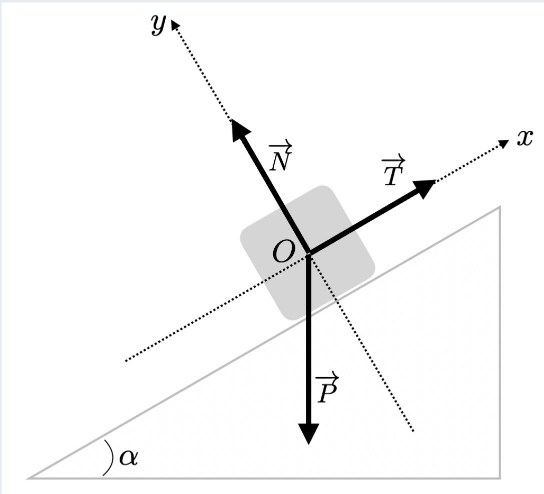
3. Exprimer $T(x)$ en fonction de Q et de x.
4. Déterminer les racines positives x_1 et x_2 solutions de $T^2(x) = 2$

■

4 Représentation vectorielle

On définit les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{U}$ selon un repère (O,x,y) selon les projections de ce vecteur de norme U et, par exemple, d'angle θ avec l'axe Ox selon $U_x = U\cos(\theta)$ et $U_y = U\sin(\theta)$.

Problème 6 équilibre en mécanique
Un cube de centre O est en équilibre sur un plan incliné d'angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale. Les forces sont représentées par des vecteurs dans le plan ramenées au centre O du système étudié.



Ce système est soumis à 3 forces :

- son poids $\overrightarrow{P}$ avec $P = \|\overrightarrow{P}\| = 50\,\text{N}$
- la réaction normale au plan incliné $\overrightarrow{N}$
- l'action tangentielle $\overrightarrow{T}$ entre le cube et le plan, liée au frottement

La représentation ci-contre des 3 forces ne correspond pas à l'état d'équilibre voulu.

Reproduire le schéma ci-dessus avec **uniquement** le poids en utilisant l'échelle $10\,\text{N} = 1\,\text{cm}$.

1. Tracer $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$ de matière à assurer l'équilibre du cube en indiquant votre démarche par des traits de construction au crayon.
2. Évaluer les normes de $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$ selon votre construction.
3. Exprimer les expressions littérales des normes de $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$ en fonction de P , $\cos(\alpha)$ ou $\sin(\alpha)$. Vérifier la cohérence des valeurs numériques avec l'évaluation graphique.