Préparation pour la rentrée en PCSI

Cette feuille d'exercices s'adresse aux élèves rentrant en PCSI au lycée Condorcet. Elle contient des exercices de perfectionnement autour de certains points du programme de lycée, parsemés de quelques énigmes pour occuper ses vacances.

Il s'agit en particulier de s'entraîner aux techniques calculatoires. Il est en effet indispensable d'avoir de solides bases de calcul afin d'être préparés à aborder sereinement le programme de PCSI (La calculatrice sera interdite lors des devoirs de mathématiques, comme elle l'est lors de beaucoup d'épreuves de concours).

Il est donc indispensable de réaliser ces exercices sans calculatrice. En cas de difficulté ou de manque de temps, pas de panique ! Il vaut mieux se concentrer sur quelques exercices, quitte à ne pas tout terminer.

1 Fractions

Exercice 1 Simplifier autant que possible la fraction suivante.

$$\frac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{y+1}{y-1}}{\dfrac{y+1}{x-1}-\dfrac{x+1}{y-1}}$$

■

Exercice 2 Simplifier autant que possible la fraction suivante.

$$\frac{\dfrac{x+a}{ax+1}-\dfrac{x+b}{bx+1}}{1-\dfrac{(x+a)(x+b)}{(ax+1)(bx+1)}}$$

■

Exercice 3 Simplifier autant que possible l'expression suivante.

$$\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\times\frac{1+\dfrac{a}{b+c}}{1-\dfrac{a}{b+c}}\times\frac{b^2+c^2-(b-c)^2}{a+b+c}$$

■

Exercice 4 ***a)*** Démontrer que pour tous nombres réels a, b et c, on a l'égalité

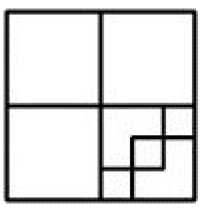
$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

b) Utiliser l'égalité précédente pour simplifier l'expression suivante :

$$\frac{x^2-yz}{1+\dfrac{y+z}{x}}+\frac{y^2-xz}{1+\dfrac{z+x}{y}}+\frac{z^2-xy}{1+\dfrac{x+y}{z}}$$

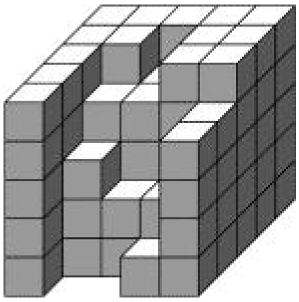
■

LES CARRÉS



Comptez tous les carrés de la figure ci-contre.

LE CUBE INCOMPLET



Mathis voulait construire un grand cube de $5 \times 5 \times 5$ petits cubes. Il n'a pas pu le terminer. Combien de petits cubes lui manquait-il?

Exercice 5 Simplifier au maximum les deux expressions suivantes.

a) $$\frac{\dfrac{a(a+b)}{a-b}+\dfrac{a(a+c)}{a-c}}{1+\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}}+\frac{\dfrac{b(b+c)}{b-c}+\dfrac{b(b+a)}{b-a}}{1+\dfrac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}}+\frac{\dfrac{c(c+a)}{c-a}+\dfrac{c(c+b)}{c-b}}{1+\dfrac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}}$$

b) $$\frac{b+c-2a}{\dfrac{(b-c)^3}{b^3-c^3}+\dfrac{(a-b)(a-c)}{b^2+bc+c^2}}+\frac{c+a-2b}{\dfrac{(c-a)^3}{c^3-a^3}+\dfrac{(b-c)(b-a)}{c^2+ca+a^2}}+\frac{a+b-2c}{\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3}+\dfrac{(c-a)(c-b)}{a^2+ab+b^2}}$$

■

2 Racines

Exercice 6 Simplifier autant que possible les expressions suivantes.
(Les nombres a, b, c, x et y sont des réels positifs).

a) $\sqrt{4096}$

b) $\sqrt{49a^2(x^2+y^2)}$

c) $\sqrt{\dfrac{432}{289}}$

d) $\sqrt{199a^6b^4c^2}$

e) $\sqrt{\dfrac{64a^6b^5}{25c^2}}$

f) $\sqrt{\dfrac{9a^6(a^2+b^2)^2}{(a+b)^4}}$

■

Exercice 7 Dans cet exercice, on demande dans chaque question lequel des deux nombres a et b est le plus grand.

a) Comparer $a=\sqrt{5}+\sqrt{2}$ et $b=\sqrt{7}+1$.

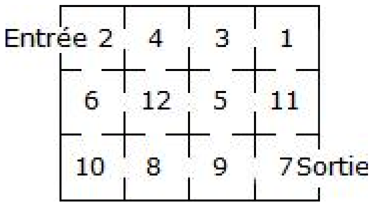
b) Comparer $a=3(3-\sqrt{7})$ et $b=2(\sqrt{3}-1)$

c) Comparer $a=\sqrt{15}+\sqrt{3}$ et $b=2+\sqrt{13}$

d) Comparer $a=\sqrt{23}-\sqrt{21}$ et $b=\sqrt{6}-\sqrt{5}$

■

VISITE ÉCLAIR



Le plan de ce musée indique le nombre de tableaux exposés dans chacune des douze salles. Matthieu n'a le temps de visiter que six salles et il veut voir le plus grand nombre possible de tableaux. Dessinez son trajet.

Exercice 8 On sait que $0 < p < m < a$. Montrer qu'on a alors

$$\frac{m}{\sqrt{a+m}-\sqrt{a-m}} < \frac{p}{\sqrt{a+p}-\sqrt{a-p}}$$

Exercice 9 On a deux réels positifs A et B qui vérifient $B \leqslant A^2$.

a) Montrer l'identité

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(A+\sqrt{A^2-B}\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(A-\sqrt{A^2-B}\right)}$$

b) En déduire

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

On rappelle que si x est un nombre réel positif, et n un entier positif, alors la racine n-ième de x est l'unique réel positif y tel que $y^n = x$. Elle est notée $\sqrt[n]{x}$.

Par exemple, $\sqrt[3]{8} = 2$, puisque $2^3 = 8$.

Les racines n-ièmes obéissent à des règles de calcul analogues à celles des racines carrées :

- $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
- $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$

pour tous réels positifs x et y. De plus, $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Exercice 10 Calculer les nombres suivants.

a) $\sqrt[3]{216}$

b) $\sqrt[4]{625}$

c) $\sqrt[5]{7776}$

d) $\sqrt{\dfrac{256}{729}}$

e) $\sqrt[3]{\dfrac{125}{512}}$

Exercice 11 Calculer les nombres suivants.

a) $\sqrt[4]{\dfrac{5^8}{3^{12}\times 7^4}}$

b) $\sqrt{100\times 25\times 36}$

c) $\sqrt[3]{27\times 343\times 729}$

d) $\sqrt[5]{32\times 243\times 3125}$

e) $\sqrt{(-12)^4}$

f) $\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4}$

g) $\sqrt[3]{125\times 1331}$

FÉVRIER PALINDROME

On écrit les dates sous la forme jjmmaaaa (par exemple 01092015 pour le 1er septembre 2015).
Le 21 février 2012 s'écrivait 21022012.
Un tel nombre, qui se lit de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche, est un nombre palindrome.
Quelle sera la prochaine date palindrome ?

Exercice 12 Simplifier autant que possible les expressions suivantes (dans lesquelles a désigne un réel positif).

a) $\sqrt[6]{a}\,\sqrt[10]{a^7}\,\sqrt[15]{a^2}$

b) $\sqrt[12]{a^7}\,\sqrt[20]{a^3}\,\sqrt[15]{a^4}$

c) $\sqrt[15]{a}\,\sqrt[21]{a^2}\,\sqrt[35]{a^6}$

d) $\sqrt[20]{a^3}\,\sqrt[28]{a^5}\,\sqrt[35]{a^6}$

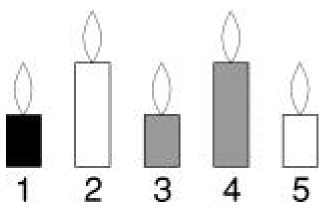
Exercice 13 Dans chaque question, on demande de trouver au moins un nombre réel x vérifiant l'égalité indiquée, en l'exprimant sous la forme la plus simple possible.

a) Trouver x tel que $x^2=(-2)^9\times\left(-\dfrac{8}{81}\right)^2\times\left(+\dfrac{5}{4}\right)^3\times\left(-\dfrac{9}{10}\right)^5$.

b) Trouver x tel que $x^3=(-3)^6\times\left(-\dfrac{125}{7}\right)\times\left(+\dfrac{8}{25}\right)^2\times\left(+\dfrac{5}{49}\right)$.

c) Trouver x tel que $x^5=\left(+\dfrac{5}{4}\right)^5\times\left(-\dfrac{16}{27}\right)^2\times\left(-\dfrac{12}{10^5}\right)$.

LES BOUGIES



Les bougies d'Adel et de Béatrice ont la même taille. Celles de Béatrice et de Chloé ont la même couleur. Celles de Chloé et Diane n'ont pas la même taille. Enfin, celles de Diane et d'Adel n'ont pas la même couleur. Quelle est la bougie d'Edwin?

Exercice 14 On a deux réels positifs a et b. Démontrer l'égalité :

$$\sqrt{a^3+\sqrt[3]{a^6b^3}}+\sqrt{b^3+\sqrt[3]{a^3b^6}}=\sqrt{(a+b)^3}$$

■

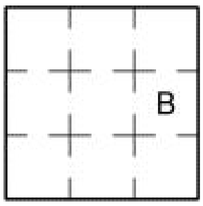
Exercice 15 Simplifier autant que possible les deux expressions suivantes.

a) $\dfrac{\left(3\sqrt{5}\right)^3+3\sqrt{5^3}}{\sqrt{30\times 24}-\sqrt[4]{25\times 16}}$

b) $\dfrac{\sqrt{\left(-\frac{2}{5}\right)^5\left(-\frac{5}{8}\right)^3(+5)^2}}{\sqrt[3]{\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(-\frac{5}{24}\right)^2\left(-\frac{5}{3}\right)^4}}$

■

LE PLAN DU MUSÉE



Ce musée expose dans neuf salles. La salle Braque (B) est indiquée. On trouve des cartes postales dans la salle Ernst. De la salle Van Gogh (V), on peut se rendre directement dans les salles Picasso (P), Cézanne (C) et Kandinski (K). De la salle Kandinski, on peut se rendre directement dans les salles Braque, Matisse (M) et Renoir (R). De la salle Dali (D), on ne peut pas se rendre directement dans la salle Braque. De la salle Matisse (M), on peut se rendre directement dans les salles Picasso et Dali. Complétez le plan à l'aide des initiales des peintres.

3 Puissances

Exercice 16 Simplifier autant que possible les expressions.

a) $\left(\frac{3}{5}a^2b^2x\right)\left(\frac{2}{3}a^3b^4y^2\right)$

b) $\left(\frac{3}{5}a^3x^5\right)\left(-\frac{4}{3}ax^2y\right)\left(\frac{5}{2}ax^2y\right)$

■

Exercice 17 Simplifier autant que possible les expressions (a et b sont des réels non nuls).

a) $\left[(a^2b^3)^4\right]^5$

b) $\left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^2\left(\dfrac{a}{4b}\right)^3\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^2$

c) $(a^3b^{-4})^2\times(-2a^{-5}b^6)^3$

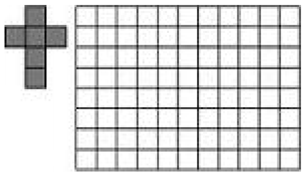
d) $\left(\dfrac{a^1b^{-2}}{a^{-3}b^0}\right)^5\left(\dfrac{a^{-6}b^5}{a^4b^{-3}}\right)^3$

■

RECTANGLE DE HASARD

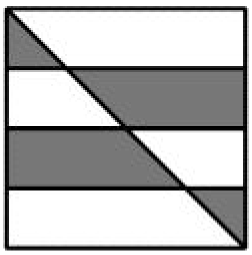
Je lance deux dés à six faces, numérotées de 1 à 6. Les deux nombres obtenus sont la longueur et la largeur (en cm) d'un rectangle que je construis. Je m'aperçois alors qu'en augmentant d'un même nombre entier de cm la longueur et la largeur de ce rectangle, son aire double. Quelle est l'aire, en cm^2, du rectangle doublé?

RANGEMENT PÉNIBLE



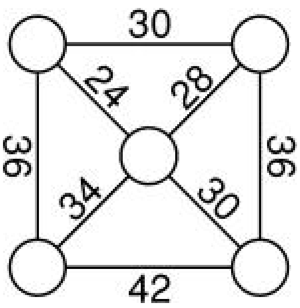
Combien peut-on ranger, au maximum, de pièces en forme de croix dans une boîte rectangulaire 11×8? Note: les pièces, rangées à plat, peuvent se toucher, mais pas se superposer.

LE CHAMP DU PÈRE MÉABLE



Pierre Méable possède un champ carré de 100 m de côté. Amateur de fleurs, il a partagé son champ en quatre bandes de même largeur, il a tracé une diagonale, puis il a planté une partie du champ en rosiers (en gris sur le dessin) et le reste en tulipes. Quelle fraction du terrain représente la partie plantée en rosiers?

LES CINQ NOMBRES



Cinq nombres étaient écrits sur les cinq disques du dessin ci-contre. Ils ont été effacés, mais heureusement, sur chaque segment, on avait pris soin de noter la somme des deux nombres placés dans les deux disques situés aux extrémités de ce segment. Retrouvez les cinq nombres.

Exercice 18 Quand x est différent de 1 ou de -1, simplifier

$$\frac{x^9+(-x)^{14}}{x^7+x^{12}}$$

Exercice 19 — ★. Calculer $(x+1)^7-1-x^7$, puis démontrer que cette expression se factorise sous la forme

$$(x+1)^7-1-x^7=7x(x+1)P(x)^2$$

où $P(x)$ est un polynôme du second degré que l'on précisera.

CARRÉ D'ANNÉE — Quel est le plus petit nombre entier positif dont le carré se termine par les chiffres 2016?

4 Calcul numérique

Exercice 20 Calculer les nombres suivants, en essayant d'être rapide et efficace.

a) $(-3)^2(+4)^2(-5)^2$

b) $\left(-\frac{8}{7}\right)^2\left(+\frac{5}{4}\right)^2\left(-\frac{7}{10}\right)^2$

c) $\left(-\frac{7}{25}\right)\left(+\frac{4}{7}\right)^2\left(-\frac{5}{8}\right)^3$

d) $(+2)^3(-5)^3(+7)^3$

e) $\dfrac{(-2)^5(+5)^9(-9)^3}{(-10)^6(+15)^4}$

f) $\dfrac{(-18)^7(+2)^4(-50)^3}{(-25)^6(-4)^5(-27)^2}$

g) $\dfrac{\left(+\frac{4}{3}\right)^3+\left(-\frac{5}{4}\right)^3-5\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)}{\left(-\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{5}{6}}$

h) $\dfrac{\left(\frac{3^2}{2^2\times 5}\right)^3+(3^2+2^4)\left(\frac{2^2}{5^2}\right)\left(\frac{3^3}{2^4\times 5}\right)}{1+\left(\frac{2^2}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{2^2}\right)^2}$

CARRÉ D'ANNÉE BIS — Quel est le plus petit nombre entier positif dont le carré commence par les chiffres 2018?

5 Inégalités

Exercice 21 On suppose que a et b sont deux nombres réels vérifiant les inégalités $-1 < a \leqslant 3$ et $-7 \leqslant b \leqslant -2$.

a) Donner le meilleur encadrement possible de $a+b$.

b) Donner le meilleur encadrement possible de $a-b$.

c) Donner le meilleur encadrement possible de $a \times b$.

d) Donner le meilleur encadrement possible de a/b.

■

Exercice 22 Soit x un réel tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant x < 2$.

a) Donner le meilleur encadrement possible de $1/x$.

b) Donner le meilleur encadrement possible de $\sin x$.

c) Donner le meilleur encadrement possible de $\dfrac{1}{1+x^2}$.

d) Que peut-on dire de $\tan x$?

■

Exercice 23 Comment faut-il choisir le paramètre réel m pour que l'équation suivante, d'inconnue x :

$$(m-2)x^2 - 2(m+3)x + 4m = 0$$

ait deux racines, l'une étant inférieure à 2 et l'autre supérieure à 3 ? ■

Exercice 24 Pour tout réel x, on pose $f(x) = \sin x - x$.

a) Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer son signe.

b) Dresser le tableau de variations de f. Que vaut $f(0)$?

c) En déduire que pour tout réel x positif, on a $\sin x \leqslant x$.

■

Bon pour un 421

Loïc et Lancelot jouent au jeu suivant. Ils ont écrit, dans cet ordre, les neuf chiffres 1 2 3 4 5 6 7 8 9 et ils essaient, en intercalant entre certains chiffres, une ou plusieurs fois, un ou plusieurs des symboles $+$, $-$, $\times$ et $/$, d'obtenir 421. Loïc a écrit $1+2\times3-45+6\times78-9=421$, tandis que Lancelot a trouvé $12\times34-56+78-9=421$. Proposez-leur une autre solution.

Billes en tête

Laurine a six sacs de billes devant elle. Les nombres de billes contenues dans les sacs sont des entiers consécutifs pas nécessairement distincts, par exemple comme 12, 12, 13, 14, 14, 15. Laurine prend les trois premiers sacs pour lui et donne les trois autres à son frère. Elle possède alors 58 billes en tout et son frère en a 61. Donnez par ordre croissant les nombres de billes contenues dans les sacs.

Exercice 25 En adaptant la méthode de l'exercice précédent, montrer que ...

a) Pour tout réel x on a $e^x \geqslant 1+x$.

b) Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ on a $\tan x \geqslant x$.

c) Pour tout réel x on a $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

■

6 Dérivation

Exercice 26 Dériver formellement (c'est-à-dire sans se préoccuper des ensembles de définition et de dérivation) les expressions suivantes :

a) $-1-x+(1-x)(3-x)$

b) $x-\sqrt{1-x}$

c) $x^3(1+\sqrt{x})$

d) $2x^3-x^2\sqrt{x}$

e) $\sin(2x)\cos(3x)$

f) $(3x-1)^5$

g) $\tan(2x)-2\ln(1+x^2)$

h) $3\sin(3x-1)-1$

■

Exercice 27 Même question que l'exercice précédent :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

b) $\sqrt{\dfrac{1}{3x-1}}$

c) $\dfrac{1+2\sin(2x)}{\cos x}$

d) $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)(x+\sqrt{x})$

e) $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

f) $\left(\dfrac{x+3}{1-x}\right)^3$

g) $\dfrac{(2x+3)^3}{(1-3x)^5}$

h) $\dfrac{1}{1+2\sqrt{3x-5}}$

■

MI-CARRÉ MI-CUBE

Un nombre est dit mi-carré mi-cube s'il peut s'écrire comme la somme d'un carré et d'un cube. Ainsi, l'an 2007 aura été une année mi-carrée mi-cube car $2007 = 26^2 + 11^3$. Quelle sera la prochaine année mi-carrée mi-cube?

Exercice 28 Même question que l'exercice précédent :

a) $\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x-2)}$

b) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$

c) $\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

d) $(2x+3)\sqrt{2x+3}$

e) $\ln(\ln x)$

f) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

g) e^{x^2+7x-4}

h) $e^{\sqrt{x^2-x+1}}$

i) $\ln(\sin x)$

j) $\ln(\cos x)$

k) $\ln(e^x+1)$

l) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

m) $\dfrac{e^{\sin x}}{1+e^{\cos x}}$

Exercice 29 Pour tout réel x, on pose $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Calculer f'', la dérivée seconde de f (c'est-à-dire la dérivée de f').

c) Calculer les dérivées troisième et quatrième f''' et $f^{(4)}$ de f.

d) Que peut-on conjecturer quant à la dérivée n-ième de f ?

7 Trigonométrie

Exercice 30 ***a)*** Rappeler la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{4}$.

b) Exprimer $\cos(2x)$ en fonction de $\cos x$.

c) En déduire la valeur de $\cos\dfrac{\pi}{8}$.

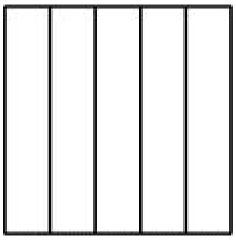
d) Déterminer également la valeur de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 31 ***a)*** Simplifier $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$.

b) Rappeler les formules pour $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.

c) En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

LE PRÉ AMBULE



Dédé Ambule a décidé de diviser son pré carré en cinq parcelles rectangulaires (voir figure). Chaque parcelle a un périmètre égal à 150 mètres. Combien mesure le périmètre du pré Ambule?

L'IMPRIMEUR MALADROIT

Lorsque l'imprimeur a voulu numéroter les pages de ce livre, dans l'ordre, de la page 1 à la dernière page, en ne sautant aucun nombre, il a commis une erreur. Il a en effet tapé des 6 à la place de tous les 9, alors que les autres chiffres ont été tapés correctement. La numérotation de toutes les pages a nécessité exactement 36 chiffres 6. Quel est le nombre de pages de ce livre?

Exercice 32 ***a)*** Exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos\theta$, puis $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.

b) Exprimer $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$, puis exprimer $\sin(3\theta)$ comme produit de $\sin\theta$ et d'une expression dépendant de $\cos\theta$.

c) Établir à l'aide des question précédentes que $\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$.

d) On note $u = \cos\dfrac{\pi}{10}$. Justifier que $16u^5 - 20u^3 + 5u = 0$.

e) Résoudre l'équation $16x^2 - 20x + 5 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

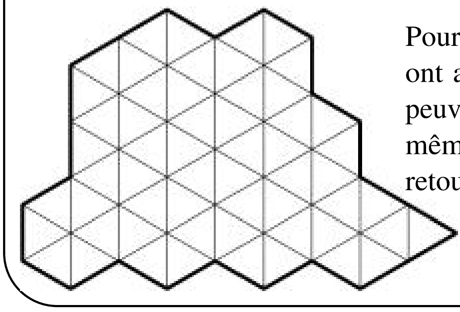
f) En déduire deux valeurs possibles pour u.

g) Justifier que $u > \cos\dfrac{\pi}{4}$ et vérifier que $\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

h) En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{10} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

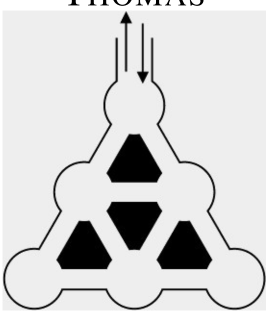
i) Déterminer ensuite la valeur des nombres : $\sin\dfrac{\pi}{10}$, $\cos\dfrac{\pi}{5}$, $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

LE GÂTEAU AU MIEL



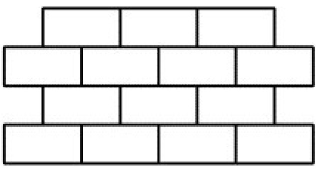
Pour son anniversaire, Mougesh a invité deux amis qui lui ont apporté un superbe gâteau nappé de miel. Comment peuvent-ils le découper en trois parts de même forme et de même aire? Note: à cause du miel, il n'est pas possible de retourner un morceau.

LA TROTTINETTE DE THOMAS



Thomas vient de recevoir en cadeau une superbe trottinette. Il décide de l'essayer sur le "trottinodrome" représenté ci-contre. Mais les pneus, encore neufs, laissent une trace sur le bitume de la piste. Thomas parcourt chaque allée exactement une fois. Il peut repasser par le même carrefour, mais la trace qu'il laisse ne doit jamais se recouper. Trouver tous les chemins possibles.

MUR DE COULEUR



Ce mur est construit à partir de briques de couleurs jaune, brune et rouge. Deux briques qui se touchent sont toujours de couleurs différentes. Les briques jaunes valent 6€, les rouges 7€et les brunes 8€. À combien ce mur reviendra-t-il, au minimum?